Une traduction de *Das Zerfallen der Curven in gerade Linien* (Au sujet des courbes qui se décomposent en lignes droites) de Paul Gordan

Andreas Bernig[*], Emmanuel Briand[†] et Andreas Seidl[‡]

25 novembre 2005

Résumé

Ceci est une traduction de l'allemand au français de l'article *Das Zerfallen der Curven in gerade Linien* (Au sujet des courbes qui se décomposent en lignes droites) de 1894 de Paul Gordan [6]. Elle est suivie de quelques notes sur la traduction, sur les notations mathématiques et sur les références modernes à cet article. La disposition originale (sauts de pages, numéros de pages, disposition des formules mathématiques) a été respectée, ce qui permet une comparaison aisée avec le texte de référence.

[*]Département de Mathématiques, Université de Fribourg, SUISSE
[†]Departamento Matemáticas, estadística y computación, Universidad de Cantabria, Santander, ESPAGNE.
[‡]Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Passau, ALLEMAGNE.

Au sujet des courbes qui se décomposent en lignes droites.

Par

P. Gordan à Erlangen.

Monsieur Brill a déterminé dans Göttingen Nachrichten (déc. 1893) les transvectants binaires à partir desquels on peut construire, au moyen de la procédure de Clebsch, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme ternaire, quaternaire, *etc*, se décompose en facteurs linéaires.

Pour une forme ternaire, cette condition consiste en l'annulation d'un transvectant $(apu)^n$ *), que j'appelerai par conséquent la formule de Brill. Le but de la présente étude est de montrer que $(apu)^n$ admet comme facteur u_x^2 et d'effectuer la division.

L'annulation du quotient

$$\frac{(apu)^n}{u_x^2}$$

est alors la condition la plus simple pour qu'une courbe se décompose en lignes droites.

§ 1.
Les intersections d'une ligne droite avec une courbe.

La solution du problème du calcul des coordonnées des intersections de la ligne droite

$$v_x = 0$$

avec la courbe

$$f = a_x^n = b_x^n$$

est bien connue. La raison pour laquelle je la reproduis encore ici est que les relations qui apparaissent avec sont utilisées dans la suite.

*)Pour une forme quaternaire ce serait $(apuv)^n$.

On fixe sur v_x deux points arbitraires x et y et on forme la série de points

$$\lambda x - y;$$

sur laquelle se trouvent les intersections cherchées, dont je désigne les paramètres par

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

ce sont les racines de l'équation

$$(\lambda a_x - a_y)^n = f \cdot \{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots a_n\} = 0. \tag{1}$$

Après détermination de ces paramètres $\lambda_\varkappa$ par résolution de cette équation, on trouve les équations des intersections par la formule :

$$\lambda_\varkappa u_x - u_y = 0. \tag{2}$$

Puisque $\lambda_\varkappa$ est une racine de l'équation (1), on a l'identité :

$$(\lambda_\varkappa a_x - a_y)^n = 0.$$

En y éliminant $\lambda_\varkappa$ au moyen de la formule (2), il vient la formule :

$$(a_x u_y - u_x a_y)^n = (auv)^n = 0,$$

qui représente le produit des intersections.

Si $(auv)^n$ s'annule pour tous les valeurs de u, chaque point de v est une intersection ; dans ce cas, la ligne droite v forme une composante de la courbe f.

Si l'on compare les coefficients des puissances de $\lambda_\varkappa^n$ dans les deux membres de la formule (1), on obtient la formule :

$$(-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} f_{y^\varkappa} = f a_\varkappa. \tag{3}$$

Ces coefficients $a_\varkappa$, qui sont la fonctions symétriques élémentaires des racines $\lambda_\varkappa$, peuvent s'écrire ainsi :

$$(-1)^\varkappa a_\varkappa = \sum \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\varkappa. \tag{4}$$

§ 2.
Les intersections d'une ligne droite avec un courbe qui dégénère en lignes droites.

Les résultats du paragraphe précédent prennent une forme légèrement différente, si nous supposons que la courbe f se décompose en n lignes droites

$$\alpha_{1,x} \alpha_{2,x} \dots \alpha_{n,x}.$$

Dans ce cas, on a les identités :

$$f = \alpha_{1,x} \alpha_{2,x} \dots \alpha_{n,x};$$
$$(a \alpha_\varkappa u)^n = 0.$$

Les intersections de la ligne v avec f sont sur ces lignes droites, et nous pouvons ordonner les racines $\lambda_\varkappa$ de sorte que le point

$$\lambda_\varkappa u_x - u_y = 0 \tag{2}$$

se trouve sur la ligne $\alpha_\varkappa$.

On a alors l'identité :

$$\lambda_\varkappa \alpha_{\varkappa,x} - \alpha_{\varkappa,y} = 0,$$

d'où il découle pour $\lambda_\varkappa$ que :

$$\lambda_\varkappa = \frac{\alpha_{\varkappa,y}}{\alpha_{\varkappa,x}}.$$

Si l'on reporte ceci dans la formule (4), celle-ci devient :

$$(-1)^\varkappa a_\varkappa = \sum \frac{\alpha_{1,y}}{\alpha_{1,x}} \frac{\alpha_{2,y}}{\alpha_{2,x}} \dots \frac{\alpha_{\varkappa,y}}{\alpha_{\varkappa,x}}. \tag{4a}$$

§ 3.

La formule de Brill.

La somme de puissances des racines $\lambda_\varkappa$:

$$s_\nu = \lambda_1^\nu + \lambda_2^\nu \dots \lambda_n^\nu$$

se représente en fonction des coefficients $a_\varkappa$ au moyen des formules de Newton. Leur développement en produit de puissances commence par les termes :

$$s_n = (-1)^n a_1^n + (-1)^{n-1} a_1^{n-2} a_2 \dots. \tag{5}$$

On reporte dans cette formule l'expression de $a_\varkappa$ obtenue par la formule (3) :

$$f a_\varkappa = (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} f_{y^\varkappa}$$

et l'on obtient alors pour s_n une fraction dont le numérateur est un fonction polynomiale de f et de ses polarisés f_{y^ν}, et dont le dénominateur est f^n.

De là il s'ensuit que le produit :

$$\begin{aligned} f^n s_n &= np \\ &= f^n \cdot \left(\frac{\alpha_{1,y}^n}{\alpha_{1,x}^n} + \frac{\alpha_{2,y}^n}{\alpha_{2,x}^n} \dots \frac{\alpha_{\varkappa,y}^n}{\alpha_{\varkappa,x}^n} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

est une fonction polynomiale de f et de ses polaires. Le développement de cette fonction polynomiale en produits de puissances des polaires commence par :

$$p = n^{n-1} f_y^n - n^{n-1} f f_y^{n-2} f_{y^2} \cdots \tag{7}$$

et les autres termes admettent le facteur f^2. La forme p est de degré n en les variables y ; je l'écris symboliquement :

$$p = p_y^n.$$

En dérivant suivant y et en incrémentant suivant x, il vient :

$$f^n s_\varkappa = n p_y^\varkappa p_x^{n-\varkappa}.$$

De la formule (6) résulte directement :

$$(apu)^n = 0. \tag{8}$$

Cette formule est due à Brill, et c'est une condition nécessaire pour que la courbe f se décompose en lignes droites. On peut montrer aussi qu'elle est suffisante. En effet, si l'on prend un point x arbitraire sur f et que l'on mène la tangente f_y à la courbe passant par ce point, la formule :

$$(afu)^n$$

donne le produit des intersections de la tangente f_y avec la courbe f. Maintenant si la formule (8) est vérifiée, alors $(afu)^n$ s'annule pour toutes les valeurs de u. De là il s'ensuit alors que f_y forme une composante de la courbe. Puisque dans ce cas toutes les tangentes sont des composantes de la courbe, c'est que celle-ci se décompose en lignes droites.

§ 4.
Le Facteur u_x^2.

Le transvectant $(apu)^n$ ne fournit pas la forme la plus simple dont l'annulation corresponde à la décomposabilité de f en lignes droites. Le but de cette étude est de montrer que $(apu)^n$ est divisible par u_x^2 et d'effectuer la division. Je divise mon travail en 4 étapes :

1) J'indique les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme

$$\varrho = u_\varrho^n$$

admette la puissance u_x^m comme facteur.

2) Comme dit plus haut, on peut représenter s_n comme fonction polynomiale des coefficients $a_\varkappa$ au moyen des formules de Newton. Des propriétés de ces fonctions polynomiales sont alors dérivées, dont il résulte que $(apu)^n$ possède le facteur u_x^2.

3) La forme

$$(afu)^n,$$

dont le développement a les mêmes premiers termes que $(apu)^n$ d'après la formule (7), est mise sous forme normale, c.-à-d. sous forme :

$$(afu)^n = Au_x^n + Bf,$$

où B est une somme de produits symboliques, composés seulement des facteurs symboliques :

$$f, (abu), (afu), b_x.$$

4) $(apu)^n$ est divisé par u_x^2.

§ 5.
Condition pour que ϱ admette le facteur u_x^2.

Nous voulons nous occuper dans ce paragraphe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme :

$$\varrho = u_\varrho^n \tag{9}$$

admette comme facteur une puissance de u_x, par exemple u_x^m, en commençant avec le cas :

$$m = 1.$$

Nous affirmons que :

$$(\varrho xy)^n = 0 \tag{10}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que ϱ possède le facteur u_x.

Preuve : Si ϱ a comme facteur u_x, on trouve par division une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-1}$$

telle que l'identité suivante soit vérifiée :

$$u_\varrho^n = u_x\, u_\vartheta^{n-1}.$$

Si on y remplace u par $\widehat{xy}$, on obtient la formule (10).

Inversement, si cette formule est vérifiée, on remplace y par $\widehat{uv}$ et l'on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= (\varrho x\widehat{uv})^n = (u_\varrho v_x - v_\varrho u_x)^n \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (u_\varrho v_x)^{n-\varkappa} (v_\varrho u_x)^\varkappa, \end{aligned}$$

ainsi

$$\varrho v_x^n = -u_x v_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (u_\varrho v_x)^{n-\varkappa} (v_\varrho u_x)^{\varkappa-1},$$

ce grâce à quoi notre affirmation est prouvée.

Je passe désormais au cas

$$m = 2$$

et affirme que la formule :

$$v_\varrho (\varrho xy)^{n-1} \tag{10a}$$

livre la condition nécessaire et suffisante pour que ϱ possède le facteur u_x^2.

Preuve : Si ϱ a comme facteur u_x^2, on trouve par division une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-2}$$

telle que soit satisfaite l'identité suivante :

$$u_\varrho^n = u_x^2\, u_\vartheta^{n-2}$$

Je dérive suivant u et incrémente suivant v ; il vient alors

$$nu_\varrho^{n-1} v_\varrho = 2u_x v_x u_\vartheta^{n-2} + (n-2)u_x^2 u_\vartheta^{n-3} v_\vartheta.$$

Si l'on remplace ici u par $\widehat{xy}$, on obtient la formule (10a).

Inversement si la formule (10a) est vérifiée, on remplace d'abord v par $\widehat{xy}$, ce grâce à quoi on obtient la formule (10), on voit donc pour l'instant que la forme ϱ possède le facteur u_x, et ainsi qu'il y a une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-2}$$

telle que soit satisfaite l'identité suivante :

$$u_\varrho^n = u_x^2\, u_\vartheta^{n-2}.$$

On dérive suivant u et on incrémente suivant v, ce qui donne :

$$nu_\varrho^{n-1} v_\varrho = v_x u_\vartheta^{n-1} + (n-1) u_x v_\vartheta u_\vartheta^{n-2}$$

et, si l'on remplace u par $\widehat{xy}$, d'après la formule (10a) :

$$0 = v_x (\vartheta xy)^{n-1}.$$

Cette formule montre que la forme ϑ possède le facteur u_x, et donc ϱ possède le facteur u_x^2.

On peut continuer et passer de cette manière aux cas

$$m = 3, 4, 5, \ldots$$

en procédant par récurrence.

En général, on trouve comme condition nécessaire et suffisante, pour que ϱ admette comme facteur u_x^m, la formule :

$$u_\varrho^{m-1} (\varrho xy)^{n-m+1} = 0. \tag{11}$$

Preuve : Si la forme ϱ a comme facteur u_x^m, il y a une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-m}$$

telle que soit satisfaite l'identité suivante :

$$u_\varrho^n = u_x^m\, u_\vartheta^{n-m}.$$

On dérive suivant u et on incrémente suivant $\widehat{xy}$, on trouve alors la série de formules :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1}u^{n-1}(\varrho xy) &= \binom{n-m}{1}u_x^m u_\vartheta^{n-m-1}(\vartheta xy),\\
\binom{n}{2}u_\varrho^{n-2}(\varrho xy)^2 &= \binom{n-m}{2}u_x^m u_\vartheta^{n-m-2}(\vartheta xy)^2,\\
\binom{3}{1}u_\varrho^{n-3}(\varrho xy)^3 &= \binom{n-m}{3}u_x^m u_\vartheta^{n-m-3}(\vartheta xy)^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\binom{n}{n-m}u_\varrho^{m}(\varrho xy)^{n-m} &= \binom{n-m}{n-m}u_x^m u_\vartheta(\vartheta xy)^{n-m},\\
\binom{n}{n-m+1}u_\varrho^{m-1}(\varrho xy)^{n-m+1} &= 0,
\end{aligned}$$

d'où la formule (11).

Inversement si cette formule est vérifiée, on peut d'abord en déduire que ϱ possède au moins le facteur u_x^{m-1}. Il y a donc une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-m+1}$$

de sorte que l'identité suivante soit satisfaite :

$$u_\varrho^n = u_x^{m-1}\, u_\vartheta^{n-m+1}.$$

On dérive suivant u et on incrémente suivant $\widehat{xy}$, on trouve la série de formules :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1}u^{n-1}(\varrho xy) &= \binom{n-m+1}{1}u_x^{m-1}u_\vartheta^{n-m}(\vartheta xy),\\
\binom{n}{2}u_\varrho^{n-2}(\varrho xy)^2 &= \binom{n-m+1}{2}u_x^{m-1}u_\vartheta^{n-m-1}(\vartheta xy)^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\binom{n}{n-m}u_\varrho^{m}(\varrho xy)^{n-m} &= \binom{n-m+1}{n-m}u_x^{m-1}u_\vartheta(\vartheta xy)^{n-m},\\
\binom{n}{n-m+1}u_\varrho^{m-1}(\varrho xy)^{n-m+1} &= \binom{n-m+1}{n-m+1}u_x^{m-1}(\vartheta xy)^{n-m+1},
\end{aligned}$$

d'où la formule (11) :

$$(\vartheta xy)^{n-m+1} = 0.$$

De là, il s'ensuit que ϑ possède la facteur u_x, et donc ϱ possède le facteur u_x^m.

La formule (11) se remplace, avantageusement dans certains cas, par ces 3 conditions plus simples :

$$u_\varrho^{m-2}(\varrho xy)^{n-m+2} = 0, \tag{12a}$$

$$u_\varrho^{m-2}(\varrho xy)^{n-m+1}(\varrho yz) = 0, \tag{12b}$$

$$u_\varrho^{m-2}(\varrho xy)^{n-m+1}(\varrho zx) = 0, \tag{12c}$$

qui sont obtenues à partir de l'identité :

$$u_z(\varrho xy) + u_x(\varrho yz) + u_y(\varrho zx) = u_\varrho(xyz)$$

En particulier, on a établi comme conditions nécessaires et suffisantes, pour que la forme ϱ admette le facteur u_x^2, les 3 suivantes :

(13a) $$(\varrho xy)^n = 0,$$

(13b) $$(\varrho xy)^{n-1}(\varrho yz) = 0,$$

(13c) $$(\varrho xy)^{n-1}(\varrho zx) = 0.$$

§ 6.

Propriétés de s_n comme fonction polynomiale des a.

Il s'agit donc de vérifier les formules (13) pour le transvectant

$$(apu)^n.$$

Ceci se fait au moyen des formules de Newton :

(14) $$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa} s_\varkappa = 0,$$

qui nous permettent de représenter les sommes de puissances des racines d'une équation :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_n = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

comme fonctions polynomiales des coefficients $a_\varkappa$. Je veux les utiliser pour dériver quelques propriétés de ces fonctions polynomiales.

Premièrement elles montrent que les produits de puissances des coefficients qui forment les termes du développement de s_n possèdent le même poids n. De là vient immédiatement la relation :

(15) $$n s_n = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varkappa a_\varkappa \frac{\partial s_n}{\partial a_\varkappa}.$$

Une autre propriété moins simple, qui porte sur les dérivées partielles

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_\varkappa}$$

va en être déduite. Pour cela, j'introduis une série de grandeurs

$$g_0\, g_1\, g_2 \cdots$$

avec

$$g_0 = -1$$

et les autres grandeurs peuvent s'en déduire par les formules de récurrence :

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa} g_\varkappa = 0. \tag{16}$$

J'affirme maintenant qu'on a la formule :

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_\mu. \tag{17}$$

Preuve. La formule :

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_n} = -n$$

montre que notre affirmation est valide pour $\mu = 0$. Pour faire la preuve pour les autres valeurs

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots$$

je fais l'hypothèse qu'elle est déjà établie pour toutes les valeurs plus petites que μ, et qu'ainsi pour $\varkappa > 0$ on a :

$$\frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} = (n-\varkappa) g_{\mu-\varkappa} \tag{17a}$$

Suivant cette hypothèse, la formule résulte de la formule (15) :

$$s_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \varkappa a_\varkappa g_{\mu-\varkappa}. \tag{15a}$$

Je dérive maintenant les formules de Newton :

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_\varkappa s_{n-\varkappa} \tag{14}$$

suivant $a_{n-\mu}$; cette grandeur apparaît d'abord dans un terme comme coefficient, et ensuite dans les $s_{n-\varkappa}$ pour lesquels $\varkappa \leq \mu$. Ainsi, vient la formule :

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\mu} a_\varkappa \frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} + s_\mu = 0,$$

ou, si l'on remplace :

$$\frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} \text{ et } s_\mu$$

par les valeurs obtenues des formules (17a) et (15a) :

$$\frac{\partial s_n}{\partial s_{n-\mu}} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} (n-\varkappa) g_{\mu-\varkappa} a_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \varkappa a_\varkappa g_{\mu-\varkappa} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial s_n}{\partial s_{n-\mu}} + n \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} g_{\mu-\varkappa} a_\varkappa = 0.$$

On utilise la formule de récurrence :

$$n \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\mu} g_{\mu-\varkappa} a_\varkappa = 0, \tag{16}$$

alors on arrive à la formule annoncée :

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_\mu.$$

Cette formule doit maintenant être utilisée pour mettre les différentielles

$$ds_\varkappa \text{ et } da_\varkappa$$

en relation les unes avec les autres.

Pour cela je pars de la somme double :

$$W = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varkappa a_\varkappa g_{n-\varkappa-\lambda+1} da_\lambda$$

et je l'écris de deux manières différentes.

Pour la première écriture, je rassemble tous les termes qui ont le même λ, et pour l'autre je fais la même chose avec les termes qui ont le même $\varkappa$. Par suite des formules :

$$s_{n-\lambda+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varkappa a_\varkappa g_{n-\varkappa-\lambda+1}, \tag{15a}$$

$$ds_{n-\varkappa+1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial s_{n-\varkappa+1}}{\partial a_\varkappa} da_\varkappa = (n-\varkappa+1) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} g_{n-\varkappa-\lambda+1} da_\lambda, \tag{17}$$

j'obtiens les deux valeurs suivantes pour W :

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} s_{n-\varkappa+1} da_\varkappa$$

et

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\varkappa}{n-\varkappa+1} a_\varkappa ds_{n-\varkappa+1},$$

dont l'égalité fournit la formule :

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\varkappa}{n-\varkappa+1} a_\varkappa ds_{n-\varkappa+1} - s_{n-\varkappa+1} da_\varkappa \right) = 0,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-1} \left(\frac{\varkappa+1}{n-\varkappa} a_{\varkappa+1} ds_{n-\varkappa} - s_{n-\varkappa} da_{\varkappa+1} \right) = 0. \tag{18}$$

Les coefficients $a_\varkappa$ et les sommes de puissances $s_\varkappa$ sont liés aux polaires de f par les formules :

$$f a_\varkappa = (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} a_y^\varkappa a_x^{n-\varkappa},$$
$$f^n s_{n-\varkappa} = n p_y^{n-\varkappa} p_x^\varkappa.$$

Si l'on désigne le point obtenu par différentiation du point y, par z, en posant :

$$dy = z$$

on obtient alors par différentiation de ces formules :

$$f da_\varkappa = (-1)^\varkappa \tbinom{n}{\varkappa} \varkappa a_y^{\varkappa-1} a_z a_x^{n-\varkappa},$$
$$f^n ds_{n-\varkappa} = n(n-\varkappa) p_y^{n-\varkappa-1} p_z p_x^\varkappa.$$

Je reporte ces valeurs de

$$a_\varkappa, s_{n-\varkappa}, da_\varkappa, ds_{n-\varkappa}$$

dans les formules :

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa} s_\varkappa = 0, \tag{14}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-1} \left(\frac{\varkappa+1}{n-\varkappa} a_{\varkappa+1} ds_{n-\varkappa} - s_{n-\varkappa} da_{\varkappa+1} \right) = 0 \tag{18}$$

et j'arrive ainsi aux formules :

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} a_y^\varkappa a_x^{n-\varkappa} p_y^{n-\varkappa} p_x^\varkappa = 0,$$

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \left\{ \frac{\varkappa+1}{n-\varkappa} (-1)^{\varkappa+1} \binom{n}{\varkappa+1} a_y^{\varkappa+1} a_x^{n-\varkappa-1} (n-\varkappa) p_y^{n-\varkappa-1} p_z p_x^\varkappa \right. \\ &\qquad \left. - p_y^{n-\varkappa} p_x^\varkappa (-1)^{\varkappa+1} \binom{n}{\varkappa+1} (\varkappa+1) a_y^\varkappa a_z a_x^{n-\varkappa-1} \right\} \\ &= (a_y p_z - p_y a_z) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} (-1)^{\varkappa+1} (\varkappa+1) \binom{n}{\varkappa+1} a_y^{\varkappa+1} a_x^{n-1-\varkappa} p_y^{n-1-\varkappa} p_x^\varkappa \\ &= -n(a_y p_z - p_y a_z) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} (-1)^\varkappa \binom{n-1}{\varkappa} (a_y p_x)^\varkappa (a_x p_y)^{n-1-\varkappa} \end{aligned}$$

ou

$$(a_y p_x - p_y a_x)^n = 0, \tag{19a}$$
$$(a_y p_z - p_y a_z)(a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0. \tag{19b}$$

La formule (19a) devient, en dérivant suivant y et en incrémentant suivant z :

(19c) $$(a_z p_x - p_z a_x)(a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0.$$

Les formules (19) sont, d'après les formules (13), les conditions pour que le transvectant :

$$(apu)^n$$

admette u_x^2 comme facteur.

§ 7.
La forme normale de $(afu)^n$.

Le 1er terme dans le développement de p_y^n suivant les polaires de f est f_{y^n}, et par conséquent le 1er terme dans le développement de $(apu)^n$ est le transvectant $(afu)^n$.

La signification géométrique de cette formule est le produit des points suivant lesquels la polaire f_y au point x coupe la courbe f. Dans le cas special où le point x se trouve sur le courbe f même, f_y devient la tangente et deux des intersections tombent au point x.

Si $f = 0$ est ainsi, $(afu)^n$ admet le facteur u_x^2. De là il suit que le transvectant $(afu)^n$ peut se mettre sous la forme :

(20a) $$(afu)^n = Au_x^2 + Bf$$

Cette forme n'est pas unique, car l'expression admet aussi la forme :

(20b) $$(afu)^n (A + Cf)u_x^2 + (B - Cu_x^2)f.$$

Pour obtenir une forme canonique pour $(afu)^n$, on doit ajouter encore une nouvelle condition. Pour cela je choisis ceux des produits symboliques dont le facteur pour f est obtenu en assemblant seulement des facteurs symboliques :

$$f, (abu), (afu), b_x$$

J'appelle cette représentation de $(afu)^n$ la forme normale de $(afu)^n$, et me donne désormais comme tâche de représenter ce transvectant sous forme normale. Ceci se décompose en 2 étapes :

1re étape. $(afu)^n$ doit être mise sous la forme :

$$(afu)^n = Au_x^2 + Bf.$$

2e étape. Le facteur B doit être mis sous une forme du type :

(21) $$B = Cu_x^2 + D$$

d'où l'on déduit que la forme normale de $(afu)^n$ est :

$$(afu)^n = (A + Cf)u_x^2 + Du_x^2,$$

avec les termes de D des produits symboliques contenant seulement les facteurs :

$$f, (abu), (afu), b_x.$$

422

La tâche de mettre le transvectant $(afu)^n$ sous la forme

$$(afu)^n = Au_x^2 + Bf \tag{20a}$$

a déjà été résolue (Math. Ann. volume 7, article de Dersch sur les tangentes doubles) dans l'essentiel ; je pourrai me contenter ainsi de présenter brièvement la procédure donnée là-bas.

Les calculs sont les suivants :

$$\begin{aligned}(afu)^n = (abu)(afu)^{n-1}b_x^{n-1} &= \frac{1}{2}(abu)\left\{((afu)b_x)^{n-1} - ((bfu)a_x)^{n-1}\right\}\\ &= \frac{1}{2}(abu)((afu)b_x - (bfu)a_x)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}\{(afu)b_x\}^{n-2-\varkappa}\{(bfu)a_x\}^{\varkappa}\\ &= \frac{1}{2}(abu)\{f(abu) - u_x(abf)\}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}((afu)b_x)^{n-2-\varkappa}((bfu)a_x)^{\varkappa}.\end{aligned}$$

De là suit la forme exigée (20a), si d'abord on pose :

$$\frac{1}{2}(abu)^2\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}((afu)b_x)^{n-2-\varkappa}((bfu)a_x)^{\varkappa} \tag{23}$$

et on montre alors deuxièmement que l'expression :

$$\frac{1}{2}(abu)(abf)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}((afu)b_x)^{n-2-\varkappa}((bfu)a_x)^{\varkappa} \tag{23}$$

admet le facteur u_x, et l'on pose :

$$L = -2Au_x. \tag{24}$$

Pour cela, on forme la somme :

$$K = \sum(abc)^2(afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\mu}a_x^{n-2-\varkappa}b_x^{n-2-\lambda}c_x^{n-2-\mu}$$

étendue sur tous les nombres $\varkappa, \lambda, \mu$ qui satisfont la relation

$$\varkappa + \lambda + \mu = n - 2.$$

À l'aide de l'identité :

$$u_x(abc) = a_x(bcu) + b_x(cau) + c_x(abu),$$

le produit

$$u_xK$$

devient la somme de 3 sommes obtenues les unes des autres par l'échange des symboles a, b, c. Puisque ces symboles représentent la même forme f, ces 3 sommes ont une la même valeur, qui est :

$$Ku_x = 3(abc)(abu)\sum(afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\mu}a_x^{n-2-\varkappa}b_x^{n-2-\lambda}c_x^{n-2-\mu}.$$

Dans cette somme, les termes correspondant à $\mu = 0$ valent ensemble $3L$, de sorte que, si dans les autres termes on pose :

$$\mu = \nu + 1$$

la formule devient :

$$\begin{aligned} &Ku_x - 3L \\ &= 3(abc)(abu)(cfu)\sum (afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\nu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu}, \end{aligned}$$

dans laquelle la somme porte sur les nombres $\varkappa, \lambda, \nu$ pour lesquels :

$$\varkappa + \lambda + \nu = n - 3$$

On y échange les symboles a, b, c les uns avec les autres, on obtient ainsi 3 sommes, qui ont la même valeur.

Nous voulons en faire la somme, de sorte qu'il vienne :

$$\begin{aligned} &Ku_x - 3L \\ &= (abc)\left\{ \begin{array}{l} ((abu)(cfu) + (bcu)(afu) + (cau)(bfu)) \\ \cdot \sum (afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\nu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu} \end{array} \right. \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a

$$L = \frac{1}{3} K u_x,$$

et donc d'après la formule (24) :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{6}K \\ &= -\frac{1}{6}\sum (abc)^2 (afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu}. \end{aligned} \tag{25}$$

Je m'attaque maintenant à la 2[e] tâche, celle de mettre la forme :

$$B = \frac{1}{2}(abu)^2 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} \left((afu)b_x\right)^{n-2-\varkappa} \left((bfu)a_x\right)^{\varkappa}$$

sous une forme :

$$B = Cu_x^2 + D \tag{21}$$

telle que les produits symboliques composant D contiennent seulement les facteurs :

$$f, (abu), (afu), b_x$$

Pour mener à bien cette tâche, je pars des identités :

$$\begin{array}{rcccc} x^n + y^n & = & (y + (x-y))^n & + & (x - (x-y))^n, \\ n(x^{n-1} - y^{n-1}) & = & n\,(y + (x-y))^{n-1} & - & n\,(x - (x-y))^{n-1} \end{array}$$

et développe les puissances du membre de droite en suivant la formule du binôme. Par ce moyen viennent les formules suivantes :

$$n(x^{n-1}-y^{n-1}) = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} \left(y^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-1},$$

$$\text{(26a)} \qquad n\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} x^{n-2-\varkappa}y^{\varkappa} = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} \left(y^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-2},$$

$$2n(x^{n-1}-y^{n-1}) = n\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n-1}{\varkappa-1} \left(y^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-1},$$

$$= \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa}\varkappa \left(y^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-1},$$

$$\text{(26b)} \qquad 0 = \sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa}(\varkappa-2) \left(y^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-3}.$$

Dans ces identités, je remplace :

$$x \text{ par } b_x(afu), \quad y \text{ par } a_x(bfu)$$

et

$$x-y \text{ par } f(abu)-u_x(abf)$$

et je multiplie la formule (26a) par $(abu)^2$ et la formule (26b) par $(abu)^2(abf)$. Ainsi, j'arrive aux formules :

$$\begin{aligned} 2nB &= (abu)^2\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}\left((a_x(bfu))^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}(b_x(afu))^{n-\varkappa}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (f(abu)-u_x(abf))^{\varkappa-2}, \\ 0 &= (abu)^2u_x(abf)\sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}(\varkappa-2)\left((a_x(bfu))^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}(b_x(afu))^{n-\varkappa}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (f(abu)-u_x(abf))^{\varkappa-3}. \end{aligned}$$

Dans ces dernières, les symboles a et b représentent la même forme f et peuvent donc être échangés ; on a donc :

$$\begin{aligned} nB &= (abu)^2\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}(-1)^{\varkappa}\binom{n}{\varkappa}(a_x(bfu))^{n-\varkappa}+(-1)^{\varkappa}(b_x(afu))^{n-\varkappa}\,(f(abu)-u_x(abf))^{\varkappa-2}, \\ 0 &= (abu)^2u_x(abf)\sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n}(-1)^{\varkappa}\binom{n}{\varkappa}(\varkappa-2)(b_x(afu))^{n-\varkappa} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (f(abu)-u_x(abf))^{\varkappa-3}. \end{aligned}$$

Si l'on développe à nouveau en suivant la formule du binôme, les formules suivantes s'ensuivent :

$$
\begin{aligned}
nB \; &= (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} \Big\{ f(abu)^{\varkappa-2} \\
&+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\lambda} \binom{\varkappa-2}{\lambda} \left(f(abu)\right)^{\varkappa-2-\lambda} \left(u_x(abf)\right)^{\lambda} \Big\}, \\
0 \; &= (abu)^2 u_x(abf) \sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-2) \binom{\varkappa-2}{\lambda-1} \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} \\
&\qquad \left(f(abu)\right)^{\varkappa-2-\lambda} \left(u_x(abf)\right)^{\lambda-1} \\
&= (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda} \lambda \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} \left(f(abu)\right)^{\varkappa-2-\lambda} \\
&\qquad \left(u_x(abf)\right)^{\lambda}, \\
nB \; &= (abu)^2 \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} \left(f(abu)\right)^{\varkappa-2} \\ \displaystyle -u_x^2(abf)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda} (\lambda-1) \\ \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} \left(f(abu)\right)^{\varkappa-2-\lambda} \left(u_x(abf)\right)^{\lambda-2}. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On compare cette formule à la formule que nous avons postulée :

$$B = Cu_x^2 + D,$$

ainsi, on conclut :

$$
\text{(27a)} \quad nC = -(abu)^2(abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} \left(f(abu)\right)^{\varkappa-4-\lambda} \left(u_x(abf)\right)^{\lambda},
$$

$$
\text{(27b)} \quad nD = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} f^{\varkappa-2} \left(f(abu)\right)^{\varkappa}.
$$

Les formules (25) et (27) donnent les valeurs pour A,C et D qui apparaissent dans la forme normale du transvectant

$$(afu)^n = (A + Cf)u_x^2 + Df,$$

je les y reporte, elle devient :

$$
n(afu)^n = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle -\frac{n}{6} u_x^2 (abc)^2 \sum (afu)^{\varkappa} (bfu)^{\lambda} (cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ \displaystyle -f u_x^2 (abu)^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ \qquad \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} \left(f(abu)\right)^{\varkappa-4-\lambda} \left(u_x(abf)\right)^{\lambda} \\ \displaystyle +f \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} \left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa} f^{\varkappa-2} \left(f(abu)\right)^{\varkappa}. \end{array} \right.
$$

Nous pouvons la simplifier encore plus, en introduisant la notation :

$$q = q_y^n = nf_y^n - f\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}(-1)^\varkappa\binom{n}{\varkappa}f^{\varkappa-2}f_{y^{n-\varkappa}}f_{y^\varkappa}; \tag{28}$$

elle devient alors :

$$(aqu)^n = u_x^2\left\{\begin{array}{l} -\frac{n}{6}(abc)^2\sum(afu)^\varkappa(bfu)^\lambda(cfu)^\mu a_x^{n-2-\varkappa}b_x^{n-2-\lambda}c_x^{n-2-\mu} \\ -f(abu)^2(abf)^2\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4}(-1)^{\varkappa+\lambda}\binom{n}{\varkappa}\binom{\varkappa-2}{\lambda+2}(\lambda+1) \\ \qquad\qquad (b_x(afu))^{n-\varkappa}\,(f(abu))^{\varkappa-4-\lambda}\,(u_x(abf))^\lambda . \end{array}\right. \tag{29}$$

§ 8.

Division par u_x^2.

Les premiers termes des développements de p_y^n et de q_y^n suivant les polaires sont :

$$n^{n-1}f_y^n - n^{n-1}\frac{n-1}{2}ff_y^{n-2}f_{y^2},$$
$$nf_y^n - \binom{n}{2}ff_y^{n-2}f_{y^2},$$

et les autres admettent le facteur f^2. De là il s'ensuit que la différence :

$$p_y^n - n^{n-2}q_y^n \tag{30}$$

admet également ce facteur, et que l'on peut donc poser :

$$p_y^n = n^{n-2}q_y^n + f^2r_y^n.$$

Par une transvection avec f, on obtient la formule :

$$(apu)^n = n^{n-2}(aqu)^n + f^2(aru)^n; \tag{31}$$

qui montre que $(aru)^n$ admet le facteur u_x^2, et donc d'après §5, que les formules suivantes sont vérifiées :

$$(a_yr_x - r_ya_x)^n = 0,$$
$$(a_yr_x - r_ya_x)^{n-1}(aru) = 0.$$

De celles-ci peuvent être dérivées les suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \big((abu)r_x - (rbu)a_x\big)^n = \big((abr)u_x + b_x(aru)\big)^n, \\ 0 &= \big((abu)r_x - (rbu)a_x\big)^{n-1}(abr)u_x = \big((abr)u_x + b_x(aru)\big)^{n-1}(abr)u_x, \\ 0 &= b_x^n(aru)^n + n\,(b_x(aru))^{n-1}\,u_x(abr) \\ &\qquad + u_x^2(abr)^2\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}\,(b_x(aru))^{n-\varkappa}\,(u_x(abr))^{\varkappa-2}, \end{aligned}$$

$$0 = n\,(b_x(aru))^{n-1}\,u_x(abr) + u_x^2(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} n\binom{n-1}{\varkappa-1}(b_x(aru))^{n-\varkappa}\,(u_x(abr))^{\varkappa-2},$$

$$f(aru)^n = u_x^2(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa}(\varkappa-1)\,(b_x(aru))^{n-\varkappa}\,(u_x(abr))^{\varkappa-2}.$$

Si l'on reporte les valeurs de $(aqu)^n$ et $(aru)^n$ dans la formule (31), on arrive à une formule finale :

$$(apu)^n = u_x^2 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{n}{6}\sum (afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ & -f(abu)^2(abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4}(-1)^{\varkappa+\lambda}\binom{n}{\varkappa}\binom{\varkappa-2}{\lambda+2}(\lambda+1) \\ & \qquad (b_x(afu))^{n-\varkappa}\,(f(abu))^{\varkappa-4-\lambda}\,(u_x(abf)^{\lambda} \\ & +f(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}(\varkappa-1)\,(b_x(aru))^{n-\varkappa}\,(u_x(abr))^{\varkappa-2}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, je veux encore remarquer qu'il est facile d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes qu'une courbe de l'espace C se décompose en lignes droites. En effet, si l'on relie tous les points de la courbe C à un point ξ arbitraire, les lignes de jonction forment un cône K. Maintenant si C se décompose en lignes droites, alors tous les cônes K se décomposent en plans.

Erlangen, Avril 1894.

Notes des traducteurs

1. La copie numérique de l'article original fait partie de la collection *Mathematica* du *Digitalisierungszentrum* de la bibliothèque nationale et universitaire de Göttingen. Elle est en accès libre *via* son site web :

   `http://gdz.sub.uni-goettingen.de`

2. Gordan utilise la méthode symbolique pour manipuler les fonctions polynomiales homogènes, *i.e.* celles-ci sont représentées (symboliquement) comme des puissances pures de formes linéaires. Pour une explication moderne, nous renvoyons à [7, 4].
3. La construction de la formule de Brill, telle qu'elle est présentée par Gordan, est reprise dans [5] (ch. 4, §2) et ré-exposée de façon moderne. En particulier, le covariant apolaire est interprêté dans la cadre de la théorie de la représentation.
4. Notons que, dans [5], l'article de Gordan est attribué par erreur à Brill, qui a néanmoins bien travaillé sur le même problème ([2] auquel Gordan fait explicitement référence, en appelant "formule de Brill", *Brill'sche Formel*, le covariant qu'il étudie ; voir aussi [3]).
5. Nous avons trouvé le texte de Gordan d'une aide considérable pour le calcul effectif de la formule de Brill. Voir [1].
6. La traduction de *Ueberschiebung* en *transvection* ou *transvectant* est explicite dans les textes du XIX^{e} siècle. Citons par exemple Salmon [8], § 303 :

   > « This operation, in German called *Ueberschiebung*, we shall call it transvection, and the covariants generated we shall call transvectants of the given covariants. »

7. Nous avons traduit *ganze Function* par *fonction polynomiale*, comme l'indique le contexte.
8. La démonstration de Gordan ne prend pas en compte, à la fin du § 4, le cas où le point x est sur une composante multiple de f (alors f_y est identiquement nulle).

Références

[1] Emmanuel Briand. Brill's equations for the subvariety of factorizable forms. In Laureano González-Vega and Tomás Recio, editors, *Actas de los Encuentros de Algebra Computacional y Aplicaciones : EACA 2004*, pages 59–63, 2004. Santander.

[2] A. Brill. Über symmetrische Functionen von Variabelnpaaren. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 20 :757–762, 1893.

[3] A. Brill. Über die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren. *Math. Ann.*, 50, 1897.

[4] Igor Dolgachev. Lectures on invariant theory. 2004.

[5] I. M. Gel′fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[6] Paul Gordan. Das Zerfallen der Kurven in gerade Lienien. *Math. Ann.*, 45 :410–427, 1894.

[7] Peter J. Olver. *Classical invariant theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[8] George Salmon. *Lessons introductory to the modern higher algebra.* Hodges, Foster and Co., Dublin, 1876.